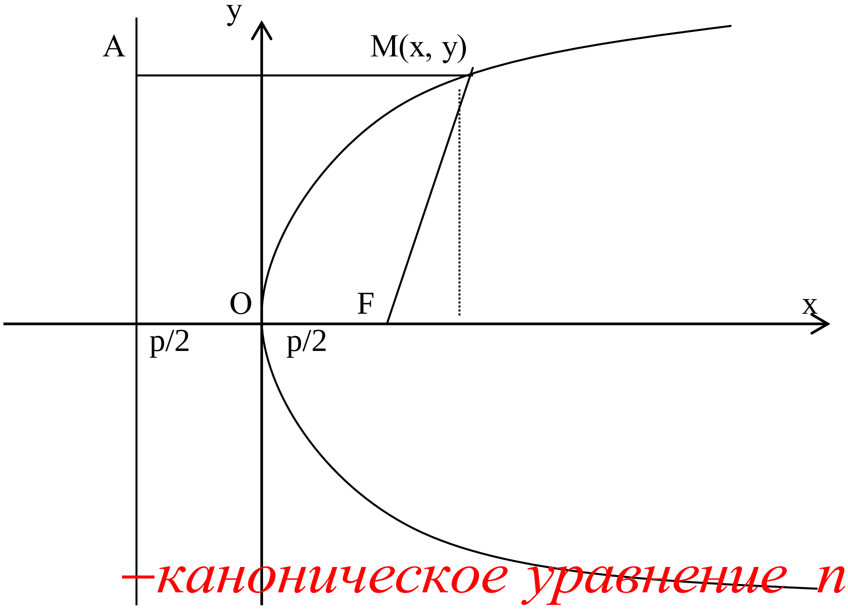
§15 Парабола

Определение 1. **Множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и одной прямой, называемой директрисой, называется *параболой*.**

Расположим начало координат посередине между фокусом и директрисой.



$y^2 = 2px$ – *каноническое уравнение параболы.*

$$(y-b)^2 = 2p(x-a)$$

уравнение параболы со смещенной вершиной (нормальное уравнение параболы)

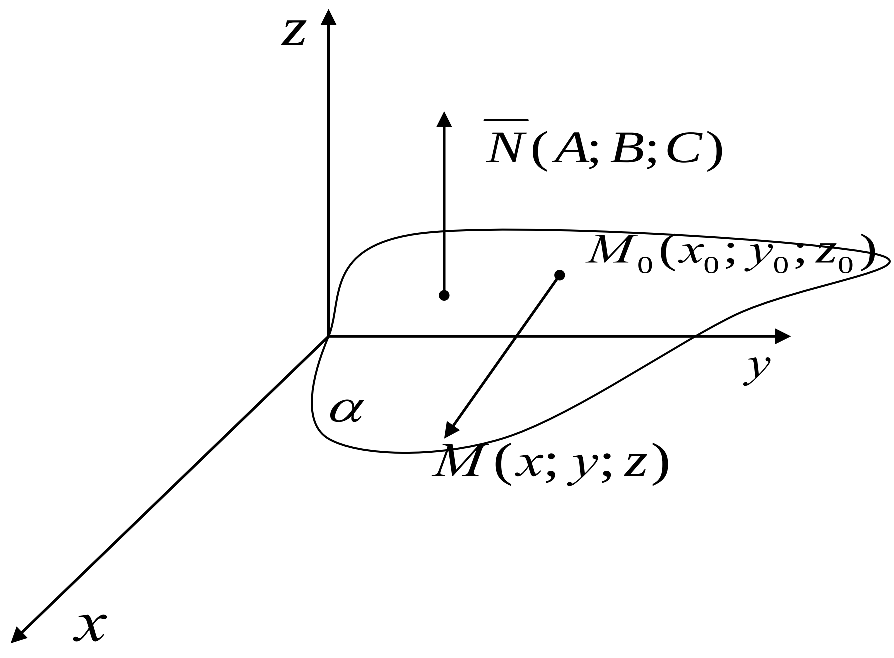
Величина p (расстояние от фокуса до директрисы) называется **параметром** параболы.

Уравнение директрисы: x = -p/2.

Фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$

Эксцентриситет параболы считается равным 1

§16 Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



Пусть точка $M(x;y;z)\in\alpha$**, тогда вектор** $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$.

Так как $\overline{N}\perp\alpha$**, то** $\overline{N}\perp\overline{M_0M}$**, тогда**

$$\boxed{\overline{N}\cdot\overline{M_0M}=0}$$ - ***векторное уравнение плоскости***

или

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$ - ***уравнение плоскости в координатах***

§17 Общее уравнение плоскости

В уравнении

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

раскроем скобки и приведем подобные:

$$Ax-Ax_0+By-By_0+Cz-Cz_0=0$$

$$Ax+By+Cz+\underbrace{(-Ax_0-By_0-Cz_0)}_{D}=0$$

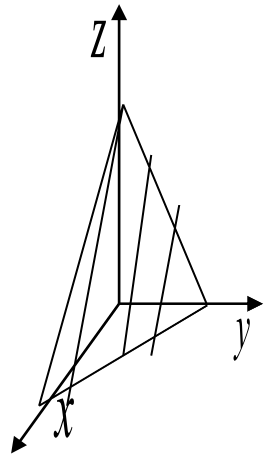
$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$ - ***общее уравнение плоскости,***

где ***A, B, C*** **– координаты нормального вектора;**

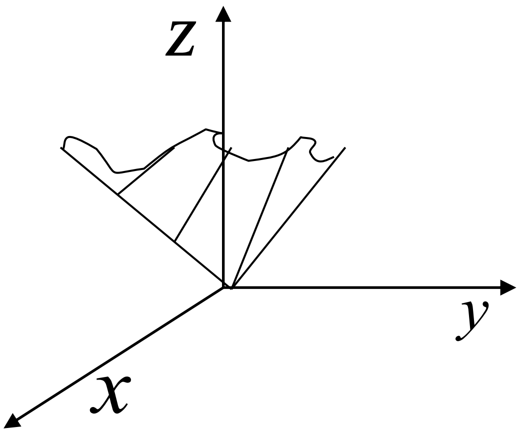
x, y, z **– координаты точки** ***M*****.**

Частные случаи:

1) $A \neq 0 \quad ; \quad B \neq 0 \quad ; \quad C \neq 0 \quad ; \quad D \neq 0$

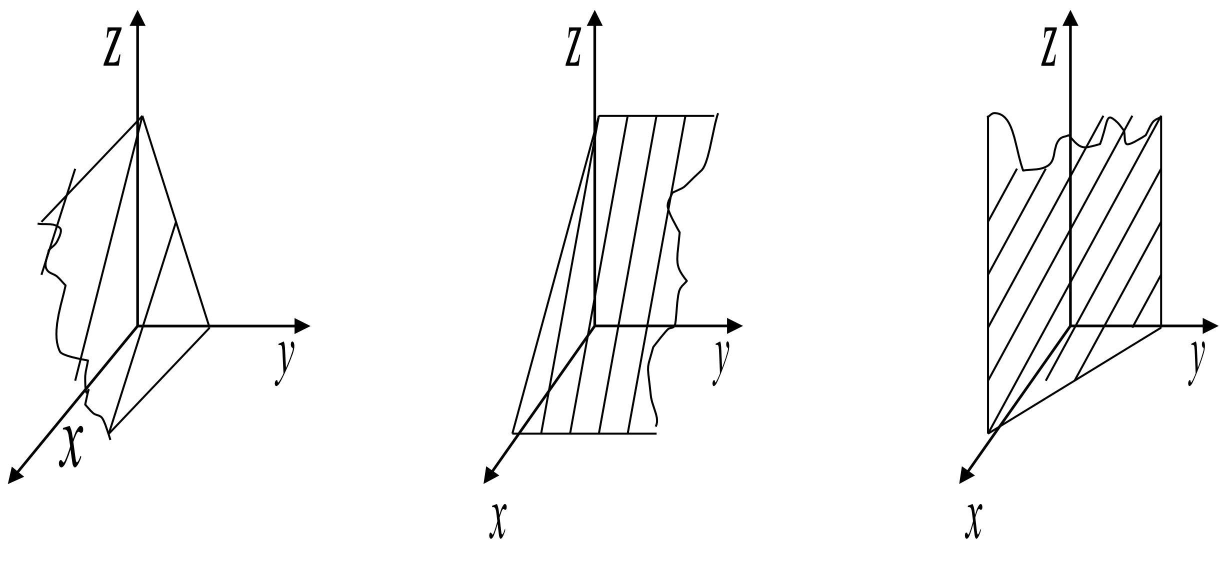


2) D = 0 – плоскость, проходит через начало координат:



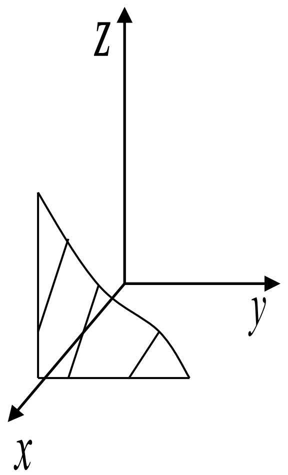
3) Если отсутствует одна из координат, то плоскость параллельна соответствующей оси:

$A = 0$ $\qquad$ $B = 0$ $\qquad$ $C = 0$

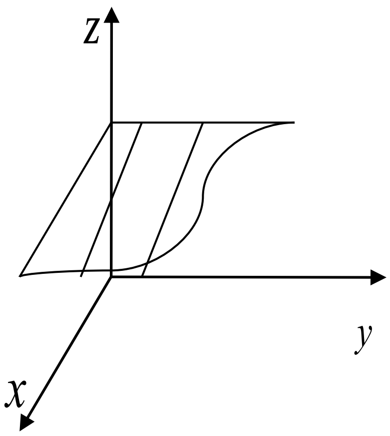


4) Если отсутствуют две координаты, то плоскость параллельна соответствующей координатной плоскости:

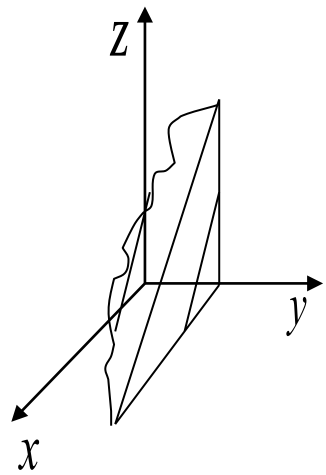
$B=0 \quad ; \quad C=0$



$A=0 \quad ; \quad B=0$

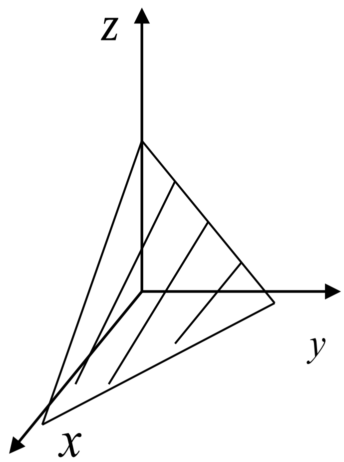


$A=0 \quad ; \quad C=0$



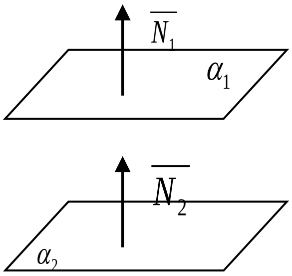
Для построения плоскости необходимо общее уравнение, путем деления на свободный член D, привести к уравнению плоскости в отрезках на осях:

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$$



§18 Взаимное расположение двух плоскостей

$a)$ $\alpha_1 \parallel \alpha_2$

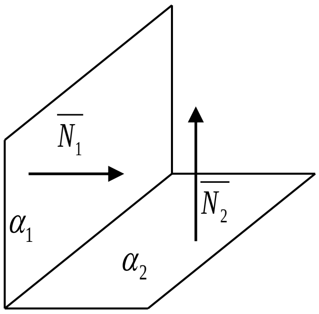


$\alpha_1 : A_1x + B_1y +$
$+ C_1z + Д_1 = 0$
$\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$

$\alpha_2 : A_2x + B_2y +$
$+ C_2z + Д = 0$
$\overline{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$

$т.к. \overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$ $, то$ $\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$

$б)$ $\alpha_1 \perp \alpha_2$



$т.к.\ \alpha_1 \perp \alpha_2, то\ \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0$

$\boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$

$в)$

Если плоскости расположены под углом друг к другу, то находят

$$\boxed{Cos\,(\overline{N_1} \,\hat{;}\, \overline{N_2}) = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|}}$$

§19 Нахождение координат любой точки, принадлежащей данной плоскости

Чтобы найти координаты точки, принадлежащей плоскости, две координаты выбирают произвольно, подставляют в уравнение плоскости, а третью координату находят из полученного равенства.

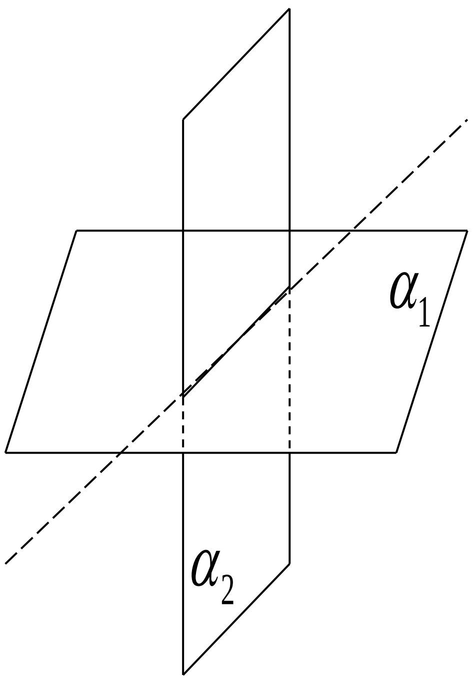
Пример: Найти координаты какой-нибудь точки, принадлежащей плоскости 2x+y-z-3=0

Возьмем x=0, y=0 и подставим в уравнение плоскости, получим –z-3=0, откуда z=-3.

Следовательно, искомая точка A (0;0;-3)

§20 Прямая в пространстве R^3

Определение 1. Прямая в системе *OXYZ* рассматривается как линия пересечения двух плоскостей.

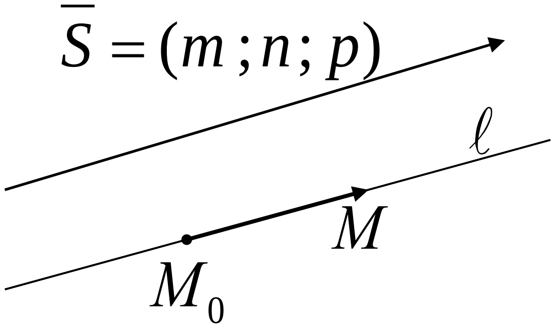


$$\ell = \alpha_1 \cap \alpha_2$$

$$\boxed{\ell : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + Д_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + Д_2 = 0 \end{cases} \quad \textit{общее уравнение прямой в } R^3}$$

Прямая в R^3 может быть задана с помощью направляющего вектора.

Определение 2. **Вектор** $\overline{S} = (m; n; p)$, **параллельный прямой** l **называется** ***направляющим вектором*** **прямой.**



Пусть точка $M_0 \in l$**. Возьмем на этой прямой произвольную точку** $M(x; y; z)$**. Тогда** $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$**.**

Так как $\overline{S} \parallel l, \text{то}\ \overline{S} \parallel \overline{M_0M} \Rightarrow$ **их координаты пропорциональны:**

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \qquad (2)$$

- ***канонические уравнения прямой,***

где *m, n, p* – любые действительные числа, в том числе и ноль, т.к. запись символическая. Но одновременно все три координаты *m, n, p* нулю быть равными не могут.

§21 Угол между прямыми в пространстве

Угол между прямыми φ и угол между направляющими векторами φ этих прямых связаны соотношением: φ = φ_1 или φ = 180^0 - φ_1. Угол между направляющими векторами находится из скалярного произведения. Таким образом:

$$\boxed{\cos\phi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве

Чтобы две прямые были параллельны необходимо и достаточно, чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. их соответствующие координаты были пропорциональны.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно,

чтобы направляющие векторы этих прямых были перпендикулярны, т.е. косинус угла между ними равен нулю.

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$